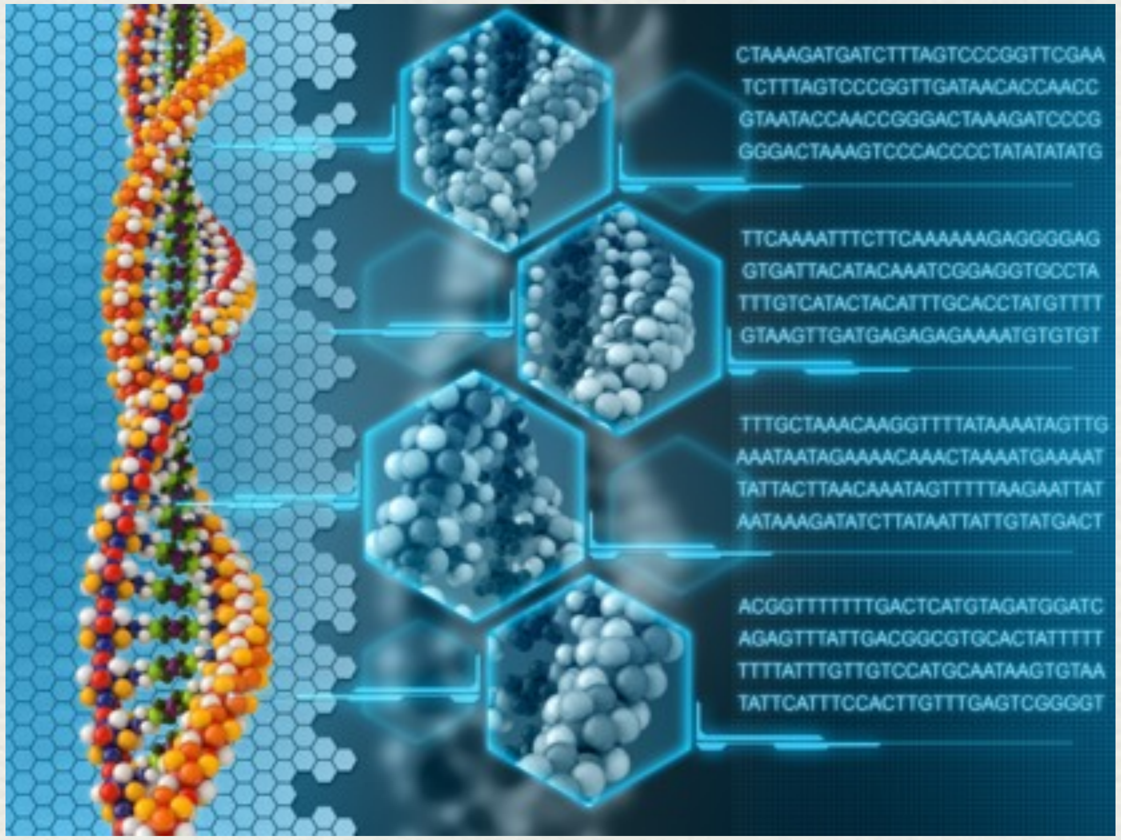
La mathématique au 21e siècle

Martin Francoeur, conseiller pédagogique au service national à la FGA du RÉCIT.

La mathématique du 21è siècle



L'apprentissage

La didactique

Cinq grands thèmes de la mathématique du 21è siècle

- La géométrie fractale
- Les systèmes complexes
- La topologie
- Le théorie du chaos
- La cryptologie

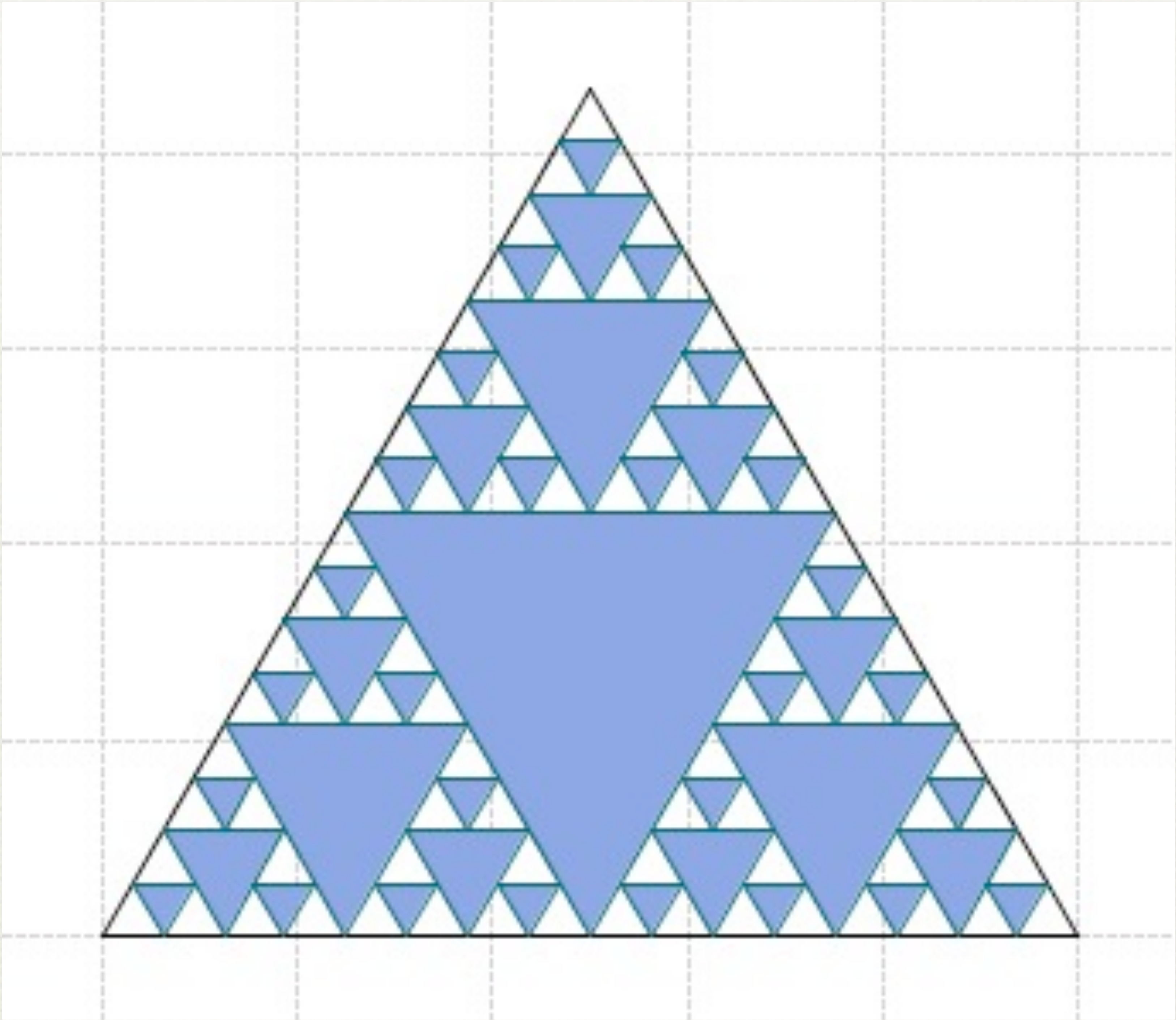
Géométrie fractale

Géométrie fractale

- Une fractale désigne des objets dont la structure est invariante par changement d'échelle.

Géométrie fractale

Géométrie fractale



Géométrie fractale

Géométrie fractale

Géométrie fractale

ractale

www.usinenouvelle.com
L'USINE NOUVELLE

Les fractales optimisent la géométrie des antennes

Par Rédaction L'USINE NOUVELLE - Publié le 25 mars 2007, à 16h37

▸ Télécoms

Pour concevoir une antenne au format d'une carte de paiement, au prix unitaire de quelques centimes d'euros, Schneider Electric exploite l'architecture fractale.

Fabriquer une antenne petite, pas chère et rayonnant dans toutes les directions... Tous les fabricants rêvent de résoudre l'équation insoluble. D'autant que les clients ou les designers de produits ne veulent plus voir cet appendice enlaidir leurs équipements. Or la miniaturisation d'une antenne se fait au détriment du prix. A moins que... l'on y glisse une pincée de fractales dans sa conception. C'est l'idée exploitée par Fabrice Roudet, un chercheur de la division sans fil de Schneider Electric. «L'antenne est en fait constituée de plusieurs petites antennes composées à partir de motifs identiques», explique-t-il. A l'origine des premiers développements en 2004 alors qu'il terminait ses études d'ingénieur, il a poursuivi ses recherches au sein du groupe de matériel électrique. C'est là qu'il a pu améliorer son l'antenne. «Les résultats mesurés sont conformes aux prévisions théoriques. Le prototype est industrialisable », annonce Fabrice Roudet.

En fait, c'est le dispositif d'alimentation de l'antenne, l'une des parties essentielles avec l'élément rayonnant, qui obéit à une architecture fractale. Le principe est simple : il s'agit de reproduire des motifs en forme d'arc de cercle. Combinés, ces motifs forment à leur tour des arcs de cercle, à plus grande échelle. Outre la miniaturisation, cette géométrie permet au dispositif d'alimentation de remplir deux missions : éviter de créer des interférences grâce à sa longueur différente de celle de l'élément rayonnant et introduire des déphasages entre les signaux émis par les sous-antennes afin d'en optimiser la combinaison. Pour obtenir le déphasage souhaité, on ajuste la longueur du brin d'alimentation en jouant sur le nombre de motifs fractals.

Qu'est-ce qu'une architecture fractale?

imag Un objet répond à une architecture fractale quand il présente des détails similaires quelle quen soit l'échelle à laquelle on l'observe, grande ou petite. Dans la nature, la fougère ou l'arbre avec leur système de ramification et de branchage, présente une telle structure. Exemple: le triangle de Sierpinski (ci-dessus).

L'intégration de cette architecture fractale, aboutit à la conception d'une antenne aux caractéristiques prometteuses : «Elle ne dépasse pas le format d'une carte de crédit », explique le chercheur. Elle peut

ractale

www.usinenouvelle.com
L'USINE NOUVELLE

Nouveau!
L'INFO 24/7 | INDUSTRIE EXPLORER | INDICES & COTATIONS | L'EXPO PERMANENTE

Actualités, archives, fiches entreprise | RECHE

L'USINE DIGITALE | SECTEURS | RÉGIONS | QUOTIDIEN DES US

Usinenouvelle.com > Technos et Innovations

Les fractales optimisent la géométr

Par Rédaction L'USINE NOUVELLE - Publié le 25 mars 2007, à 16h37

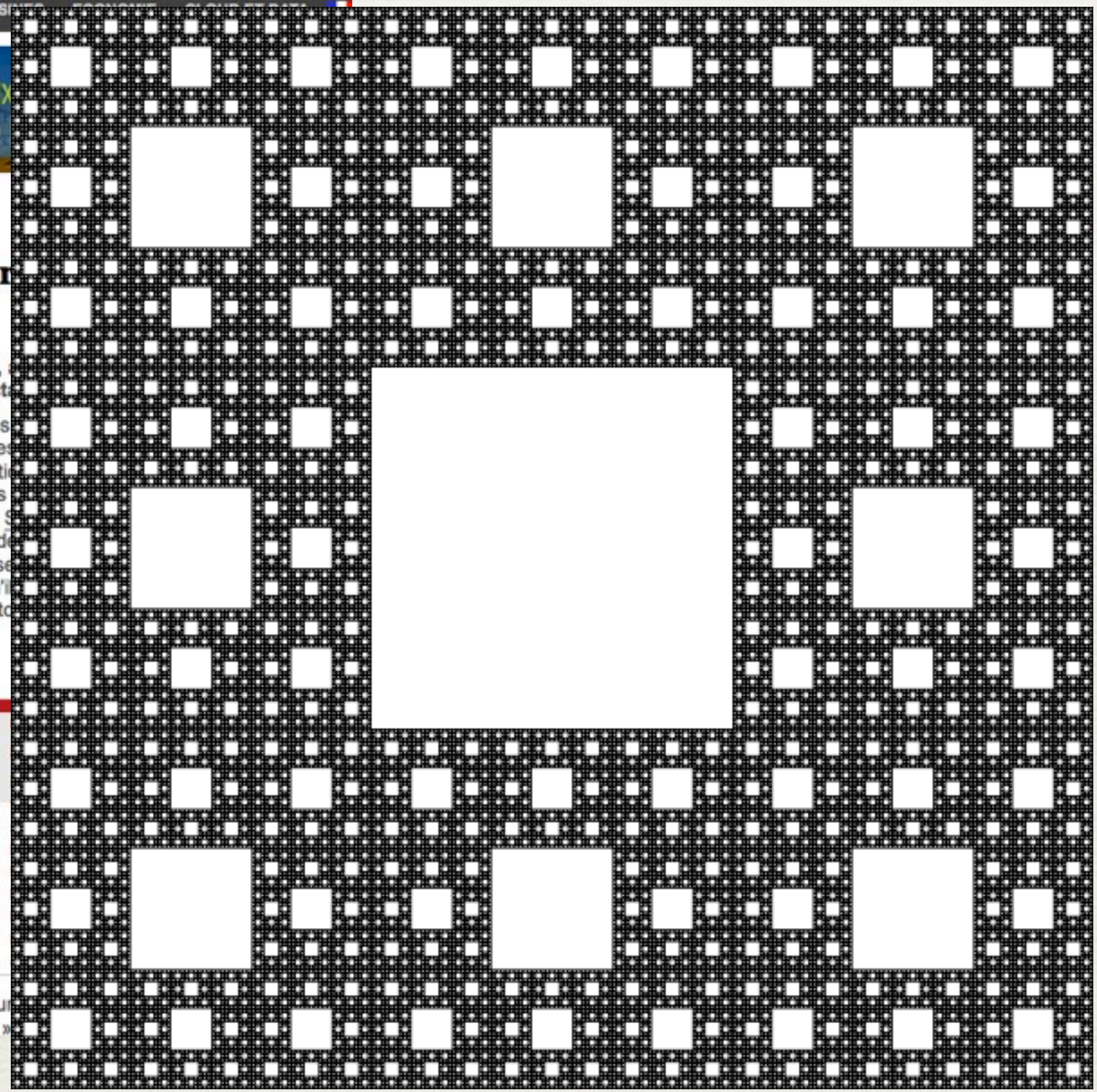
Télécoms

Pour concevoir une antenne au format d'une carte de paiement, centimes d'euros, Schneider Electric exploite l'architecture fract

Fabriquer une antenne petite, pas chère et rayonnant dans toutes les rêvent de résoudre l'équation insoluble. D'autant que les clients ou le plus voir cet appendice enlaidir leurs équipements. Or la miniaturisati détriment du prix. A moins que... l'on y glisse une pincée de fractales exploitée par Fabrice Roudet, un chercheur de la division sans fil de en fait constituée de plusieurs petites antennes composées à partir d l'origine des premiers développements en 2004 alors qu'il terminait se ses recherches au sein du groupe de matériel électrique. C'est là qu' résultats mesurés sont conformes aux prévisions théoriques. Le proto Fabrice Roudet.

En fait, c'est le dispositif d'alimentation de l'antenne, l'une des parties essentielles avec l'élément rayonnant, qui obéit à une architecture fractale. Le principe est simple : il s'agit de reproduire des motifs en forme d'arc de cercle. Combinés, ces motifs forment à leur tour des arcs de cercle, à plus grande échelle. Outre la miniaturisation, cette géométrie permet au dispositif d'alimentation de remplir deux missions : éviter de créer des interférences grâce à sa longueur différente de celle de l'élément rayonnant et introduire des déphasages entre les signaux émis par les sous-antennes afin d'en optimiser la combinaison. Pour obtenir le déphasage souhaité, on ajuste la longueur du brin d'alimentation en jouant sur le nombre de motifs fractals.

L'intégration de cette architecture fractale, aboutit à la conception d'u prometteuses : «Elle ne dépasse pas le format d'une carte de crédit »



Systèmes complexes

Systèmes complexes

- Un système complexe est un ensemble constitué d'un grand nombre d'entités et d'interaction qui empêchent l'observateur de prévoir se rétroaction, son comportement ou son évolution par le calcul.

Systèmes complexes

Systèmes complexes

Systèmes complexes

Systèmes complexes

Une entreprise est un ensemble de personnes et d'organisations qui interagissent entre elles, et qui interagit par ailleurs avec son environnement par l'intermédiaire de ses parties prenantes.

Systèmes complexes

Systèmes complexes

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2j}x_j & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mj}x_j & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Systèmes complexes

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2j}x_j & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mj}x_j & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}\right.$$

Systèmes complexes

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2j}x_j & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mj}x_j & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}\right.$$

Systèmes complexes

La topologie

La topologie

- La topologie est une branche des mathématiques concernant l'étude des déformations spatiales par des transformations continues (homothétie, translation, rotation, dilatation, etc.) sans arrachages ni recollement des structures.

La topologie

La topologie

La topologie

La représentation des transformations usuelles à l'aide des coordonnées homogènes $X = [x, y, w]^t$ et $X' = [x', y', w']^t$:

- Translation de (t_x, t_y) : $X' = T \cdot X$ avec :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Rotation d'angle θ : $X' = R \cdot X$ avec :

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Symétries :

$$\underset{\text{axe des } x}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{axe des } y}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{origine}}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

- Changements d'échelle (s_x, s_y) :

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Théorie du chaos

Théorie du chaos

- La théorie du chaos traite des systèmes dynamiques rigoureusement déterministes, mais qui présentent un phénomène fondamental d'instabilité appelé « sensibilité aux conditions initiales » qui, modulant une propriété supplémentaire de récurrence, les rend non prédictibles en pratique à « long » terme.

Théorie du chaos

Théorie du chaos

Théorie du chaos

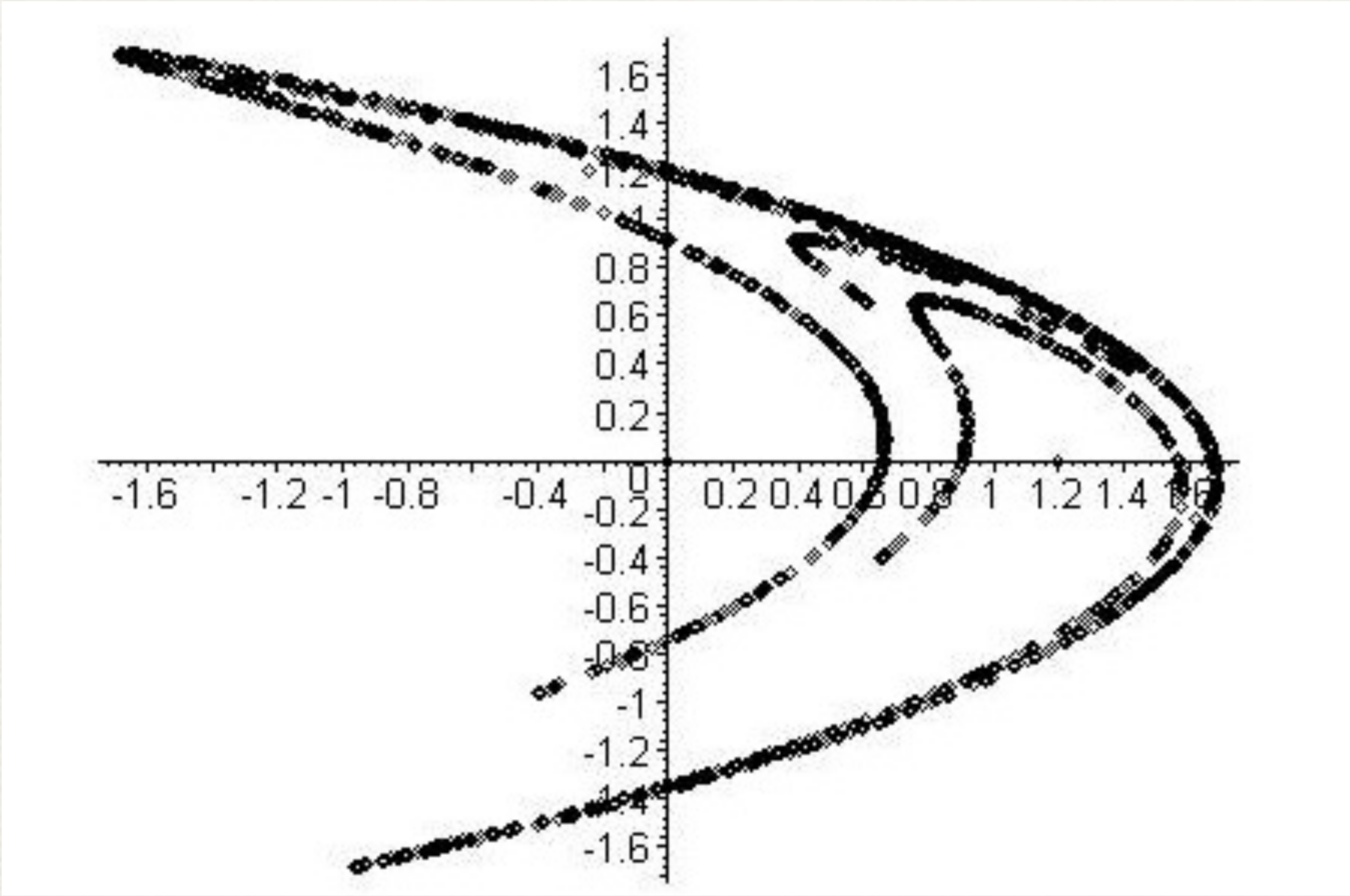
Théorie du chaos

Le modèle de Hénon consiste en une itération à deux dimensions qui peut prendre différentes formes. On utilisera la forme suivante : à partir d'un point de coordonnées x_n et y_n, l'itération fait passer au point suivant :

$$x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n$$
$$y_{n+1} = x_n$$

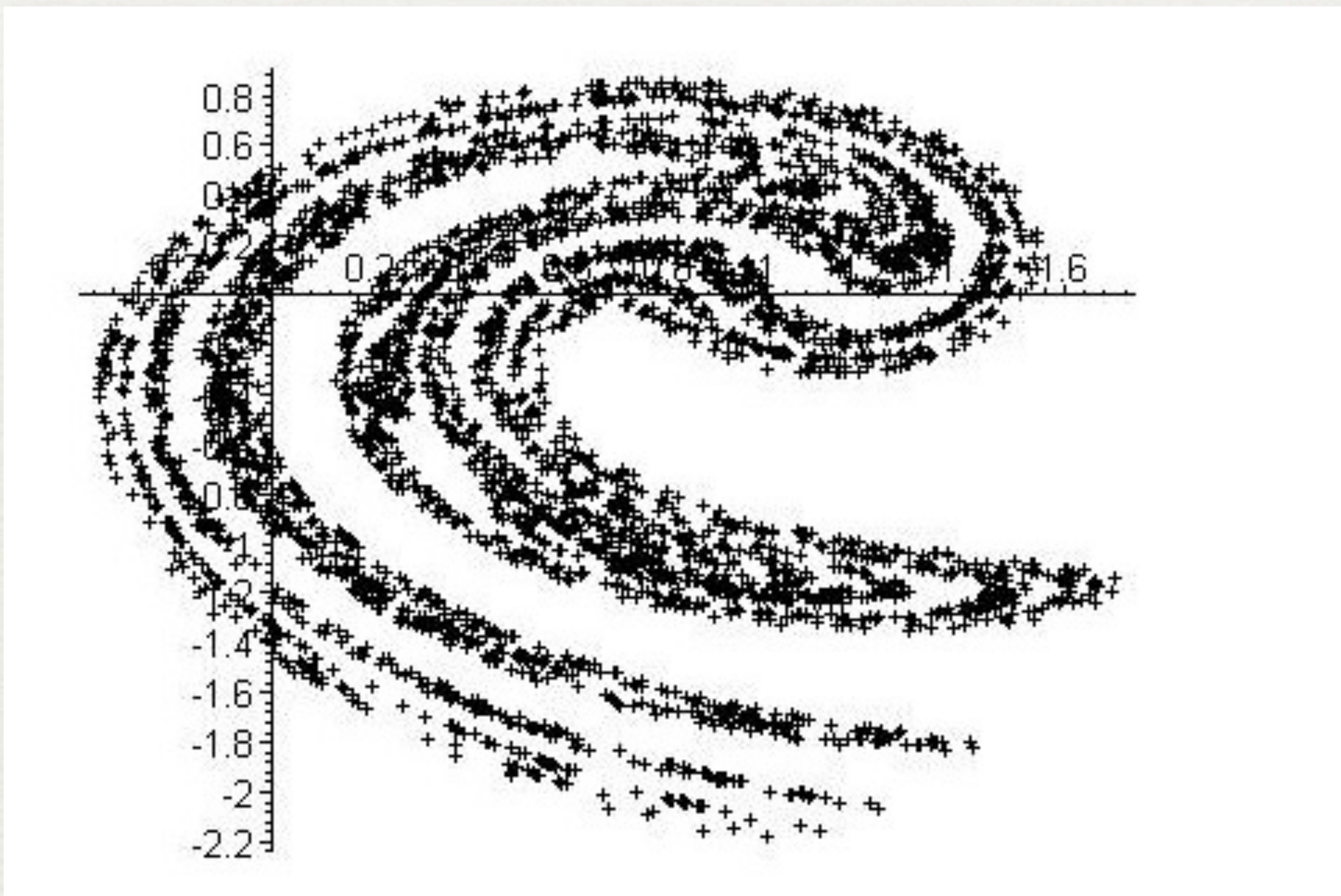
Théorie du chaos

Théorie du chaos



Théorie du chaos

Théorie du chaos



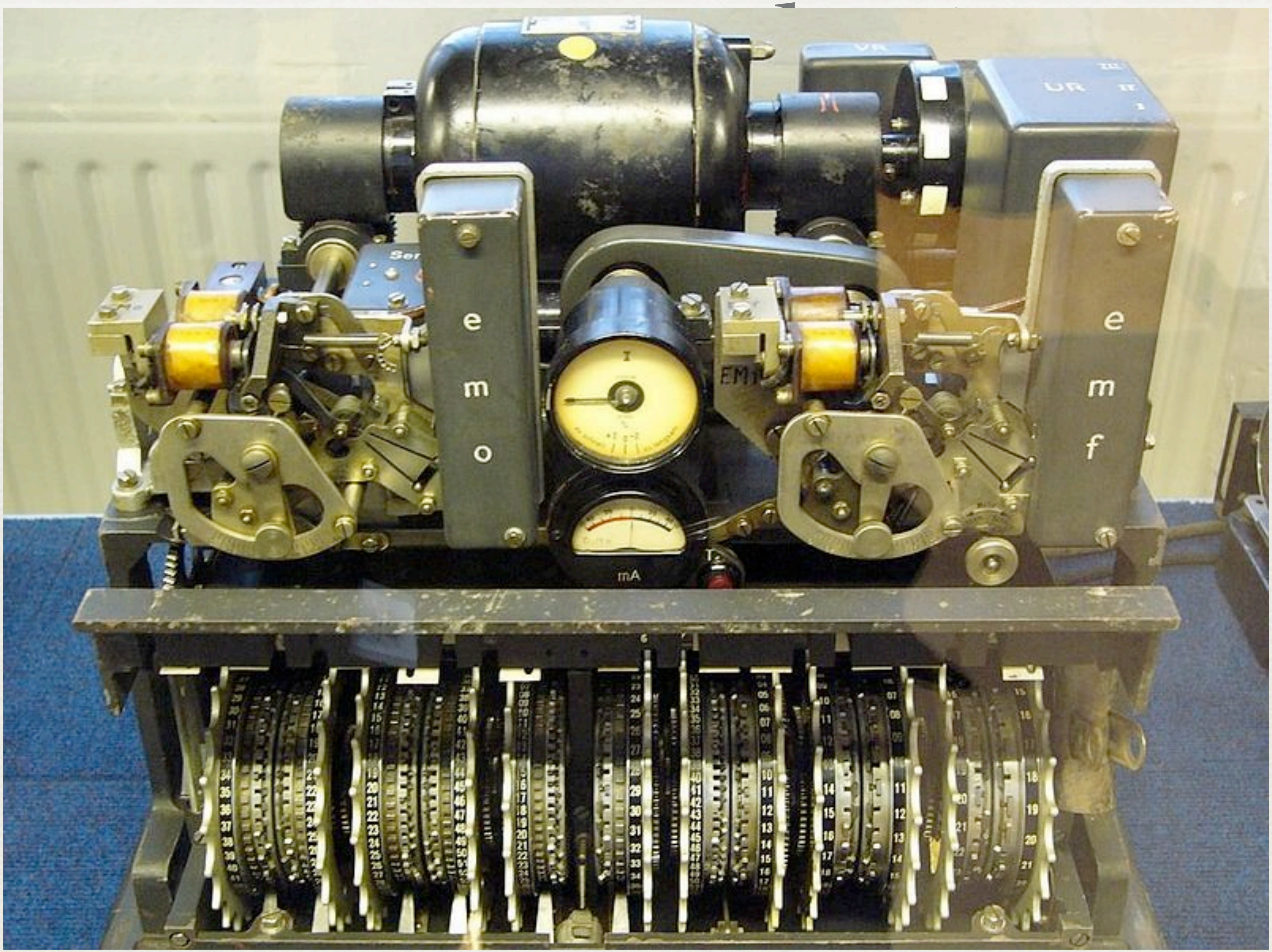
Théorie du chaos

La cryptologie

La cryptologie

- La cryptologie est la science du secret.

La cryptologie


e
m
o
e
m
f
UR
mA

La cryptologie

La cryptologie

La cryptologie

Mathématiques et cryptographie

Le terme cryptographie recouvre un ensemble de méthodes, outils et matériels permettant d'assurer la sécurité des données numériques.

C'est un domaine interdisciplinaire par excellence (voire même transdisciplinaire) qui se situe à la croisée de l'informatique et des mathématiques, mais également du traitement du signal, de la microélectronique, des sciences pour l'ingénieur et des sciences du vivant (avec les aspects biométriques, un domaine de recherche en pleine expansion en cryptographie où se posent également des problèmes de société), et qui a connu ces 20 dernières années un spectaculaire essor. L'interdisciplinarité se joue dans un va-et-vient entre problématiques d'une part, méthodes et outils d'autre part, issus des divers domaines concernés. La cryptographie se pratique de plus avec les acteurs du monde académique, mais aussi des mondes industriel et étatique (agences gouvernementales) avec une grande porosité entre ces trois types d'acteurs.

La cryptographie est un outil essentiel de la sécurité numérique avec des enjeux sociétaux, industriels et économiques importants. En particulier, c'est un outil appelé à jouer un rôle fondamental pour la protection des citoyens (protection de l'identité et des données personnelles), notamment avec l'explosion des réseaux sociaux tels que Facebook ou Twitter. Les méthodes cryptographiques sont couramment utilisés dans l'industrie, les services et les commerces, ce sont notamment ces techniques qui sécurisent le système des cartes bancaires et des achats en lignes. Ce sont aussi des outils essentiels pour la protection de la propriété intellectuelle, d'où leurs utilisations intensives dans le monde du multimédia (audio, vidéo, cinéma, jeux).

La cryptographie consiste, d'une part, dans la conception de primitives cryptographiques (chiffrements, signature numérique, etc) et dans l'élaboration de protocoles combinant ces primitives et permettant l'authentification et la confidentialité, leurs cryptanalyses et enfin le développement de « preuves de sécurité ». Elle inclut d'autre part l'implantation matérielle (e.g., cryptoprocesseur d'une carte à puces) ou logicielle de ces outils cryptographiques..

Le développement de primitives cryptographiques et leurs cryptanalyses font souvent appel à des méthodes mathématiques sophistiquées (géométries arithmétique et algébrique, méthodes p-adiques, géométrie des nombres, outils analytiques, outils

Conclusion

Conclusion

- Tout ce qui a été présenté pourrait être fait en classe.

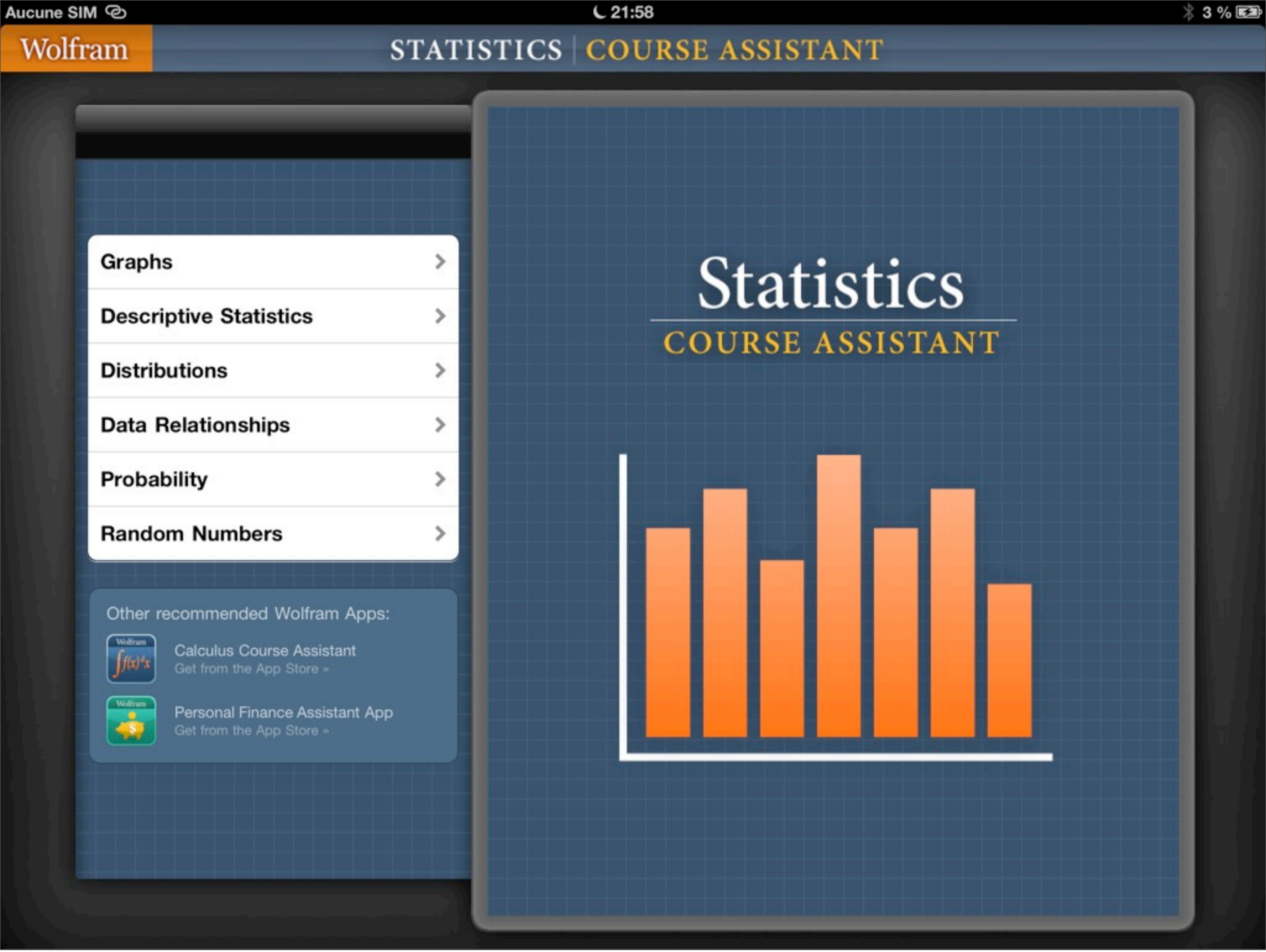
Conclusion

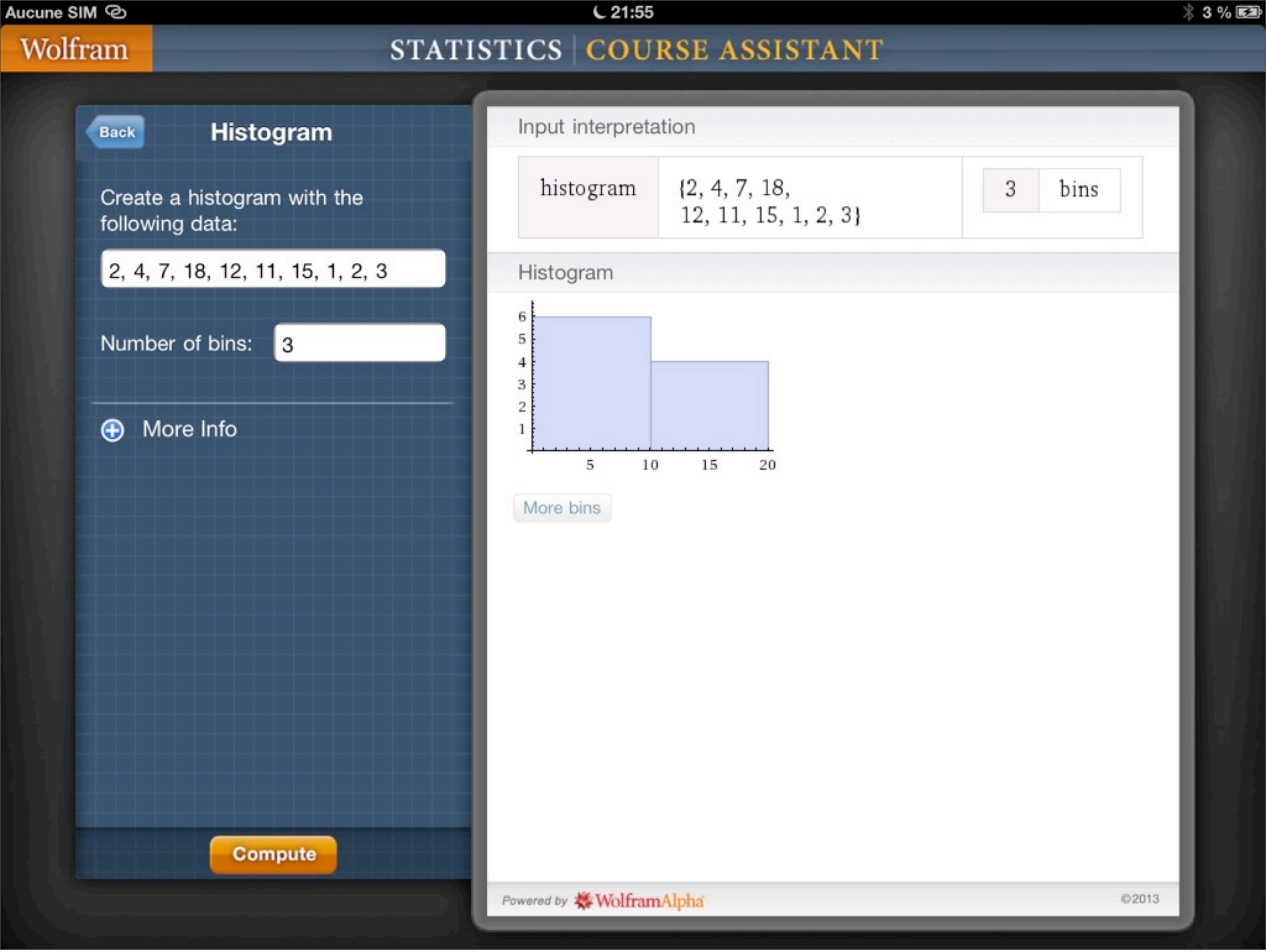
Conclusion

- Pourquoi ne le fait-on pas?

La technologie versus l'activité d'enseignement-apprentissage

Statistique


Aucune SIM
21:58
3 %
Wolfram
STATISTICS | COURSE ASSISTANT
Graphs
Descriptive Statistics
Distributions
Data Relationships
Probability
Random Numbers
Other recommended Wolfram Apps:
Calculus Course Assistant
Get from the App Store »
Personal Finance Assistant App
Get from the App Store »
Statistics
COURSE ASSISTANT



mardi 23 avril 13

Aucune SIM 21:57 3 %

Wolfram STATISTICS | COURSE ASSISTANT

Back

Coin Flips

Overall Probabilities | Specific Probabilities

Find the probabilities of heads or tails coming up in a specified number of flips.

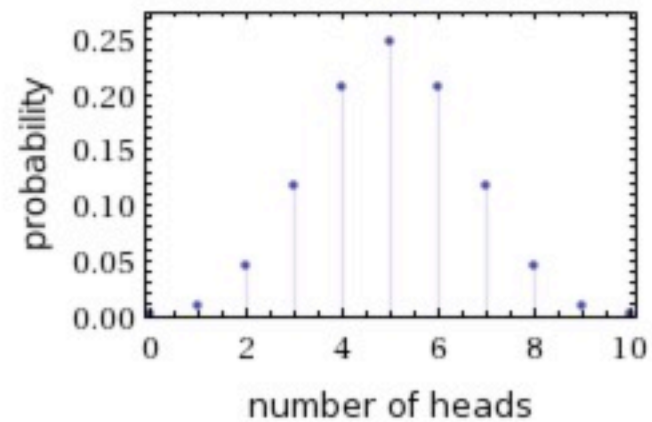
Number of flips: 10

Compute

Input interpretation

sequence of coin flips	10

Distribution of number of heads



(assuming a fair coin)

Probability results

all heads	0.09766%
all tails	0.09766%
5 heads and 5 tails	24.61%
at least one head	99.9%
at least one tail	99.9%

(assuming a fair coin)

Expected number of heads

Powered by WolframAlpha ©2013

Aucune SIM 21:57 3 %

Wolfram STATISTICS | COURSE ASSISTANT

Back **General Regression Line**

Find the regression line of the following data:

(2, 5), (12,17), (24, 26), (42, 44)

More Info

Compute

Input interpretation

fit	data	{{2, 5}, {12, 17}, {24, 26}, {42, 44}}
	model	linear function

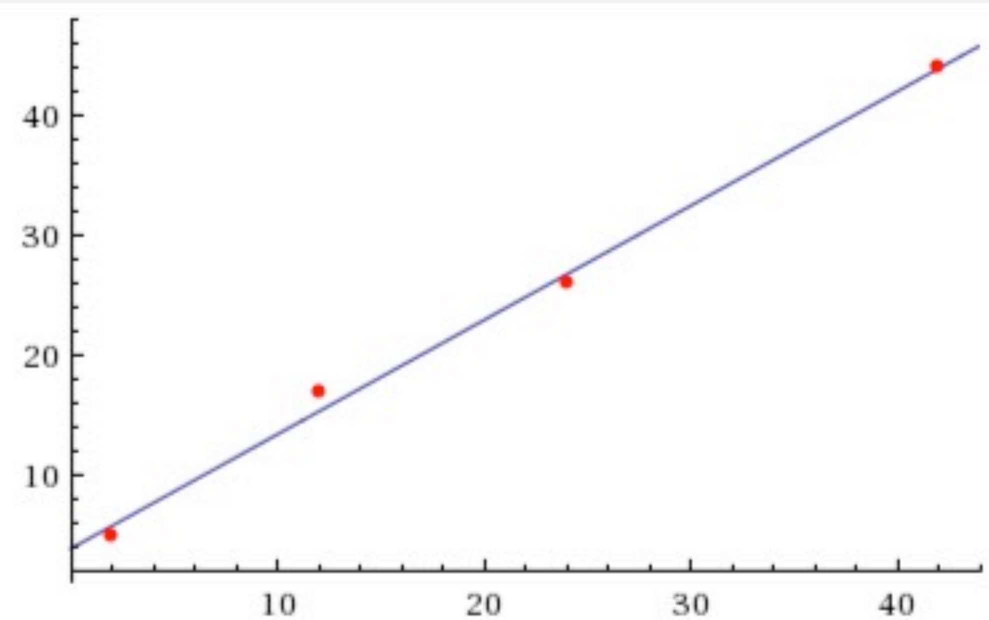
Least-squares best fit

$0.952703\,x + 3.94595$

Fit diagnostics

AIC	BIC	R^2	adjusted R^2
17.365	15.5239	0.995045	0.992568

Plot of the least-squares fit



Plot of the residuals

Powered by WolframAlpha ©2013

mardi 23 avril 13

Aucune SIM 21:57 3 %

Wolfram STATISTICS | COURSE ASSISTANT

Back **Specific Regression Line**

Find the exponent... fit of:

0.783, 0.552, 0.383, 0.245, 0.16...

More Info

Compute

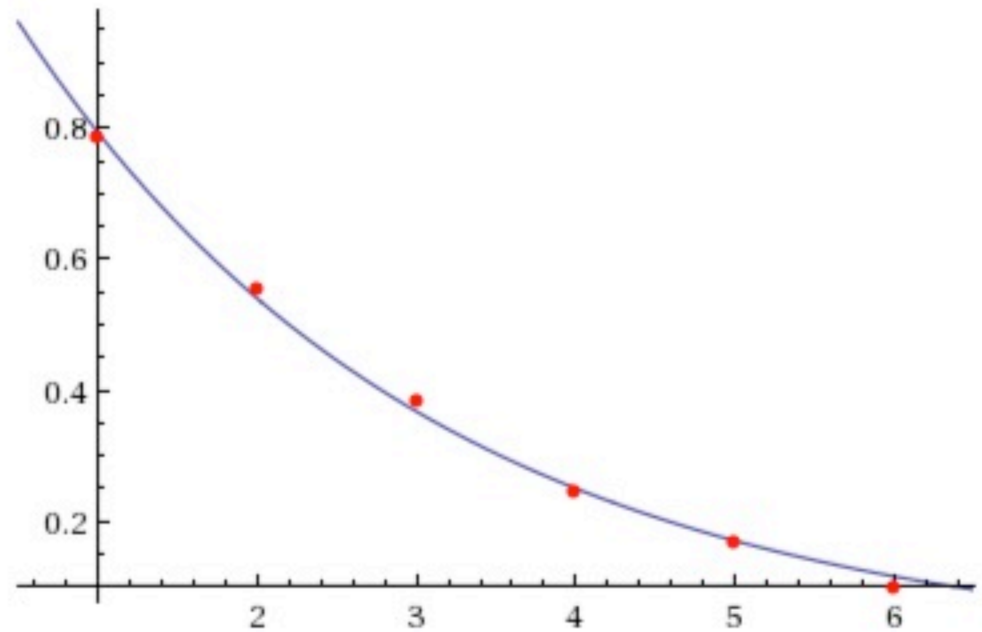
Input interpretation

fit	data	{0.783, 0.552, 0.383, 0.245, 0.165, 0.097}
	model	exponential

Least-squares best fit

$1.16548\, e^{-0.384867 x}$

Plot of the least-squares fit



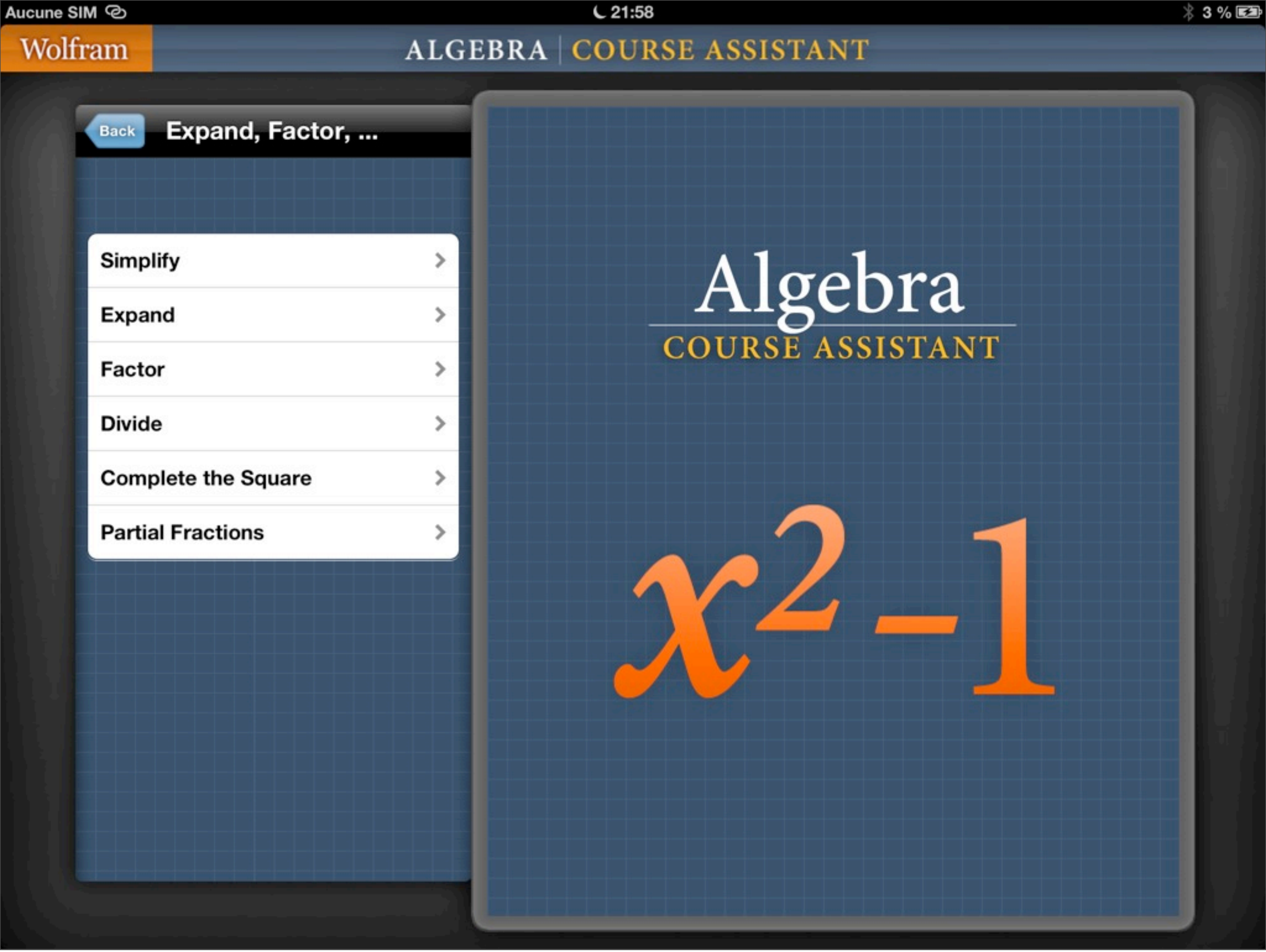
Fit diagnostics

AIC	BIC	R^2	adjusted R^2
−29.7907	−30.4154	0.999223	0.998835

Plot of the residuals

Powered by WolframAlpha ©2013

Algèbre


Aucune SIM
21:58
3 %
Wolfram
ALGEBRA | COURSE ASSISTANT
Back
Expand, Factor, ...
Simplify
Expand
Factor
Divide
Complete the Square
Partial Fractions
Algebra
COURSE ASSISTANT
x^2-1

Aucune SIM 21:52 3 %

Wolfram ALGEBRA | COURSE ASSISTANT

Back **Simplify**

Simplify:

3x^2+7x-6x^3+2x^2-4x

More Info

Compute

Input interpretation

simplify	$3x^2+7x-6x^3+2x^2-4x$

Results

$x((5-6x)x+3)$

$x(-6x^2+5x+3)$

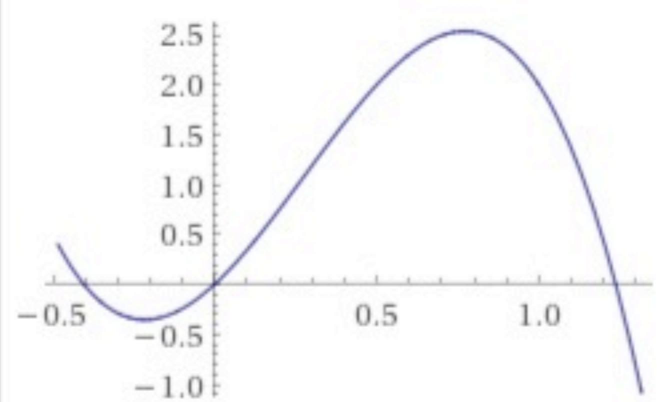
$-x(6x^2-5x-3)$

$-6\left(x-\frac{5}{18}\right)^3+\frac{79}{18}\left(x-\frac{5}{18}\right)+\frac{265}{243}$

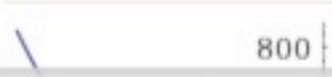
$\frac{1}{24}\left(-12x+\sqrt{97}+5\right)x\left(12x+\sqrt{97}-5\right)$

Fewer

Plots

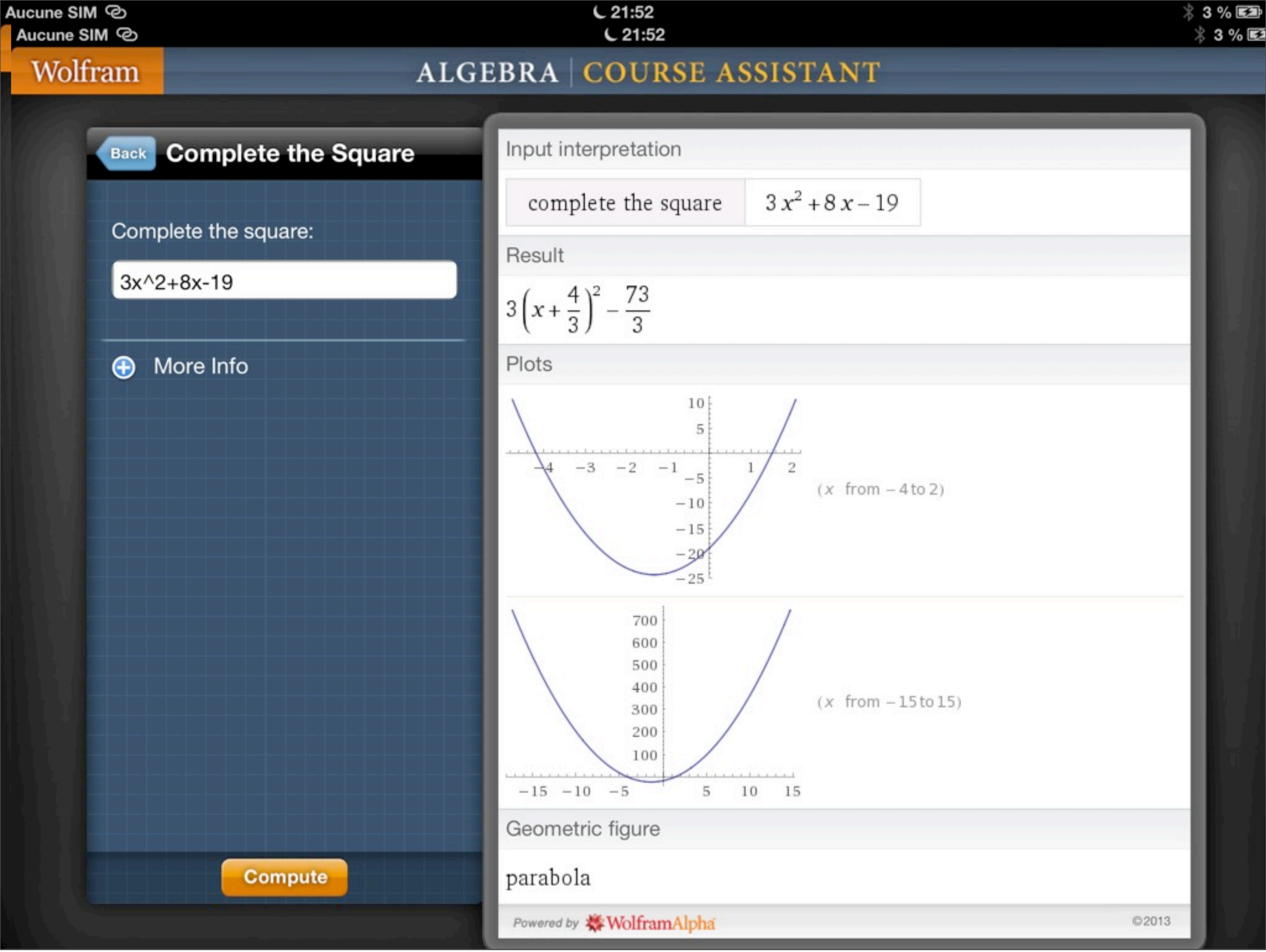


(x from −0.5 to 1.25)

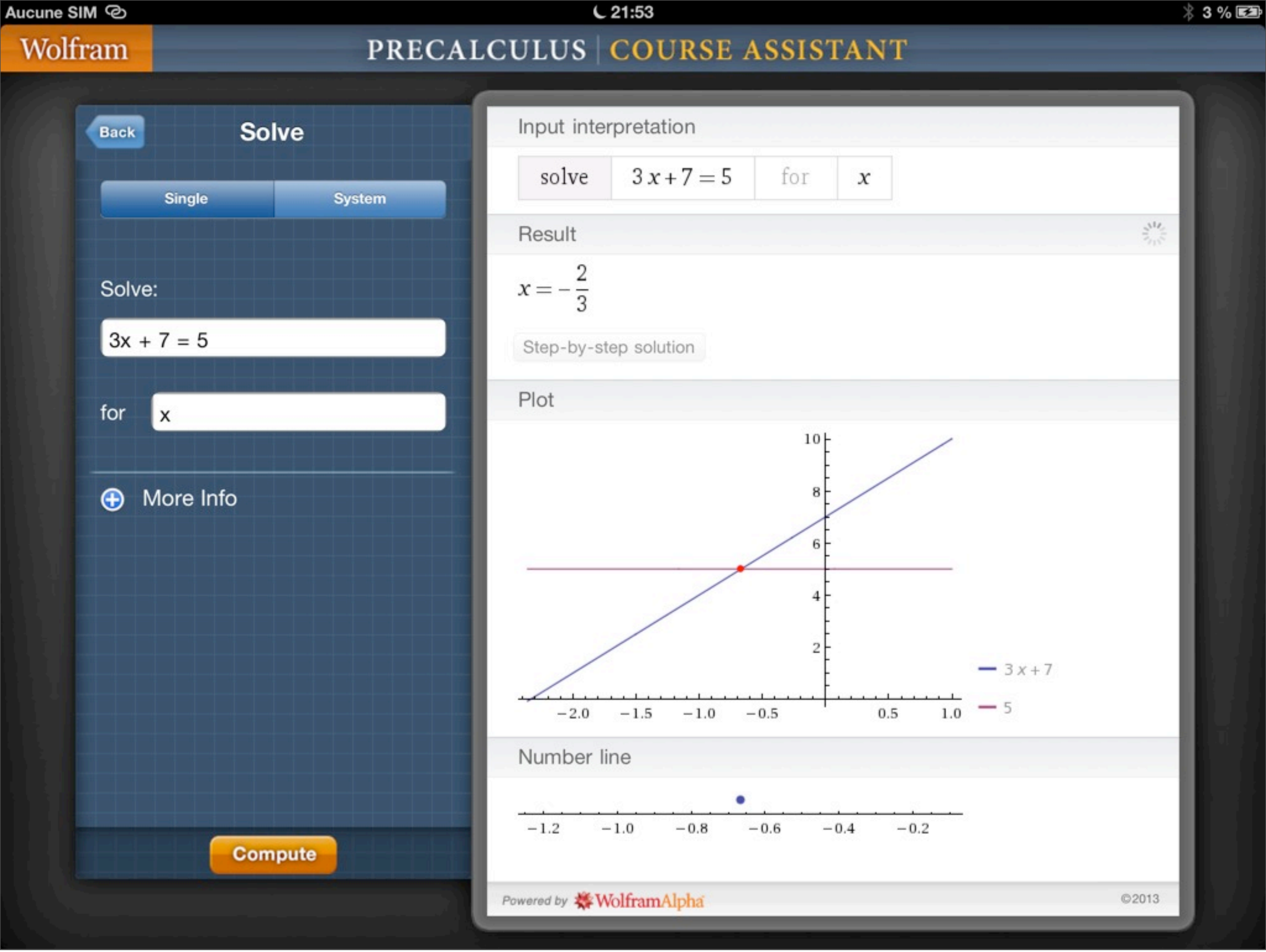


Powered by WolframAlpha ©2013

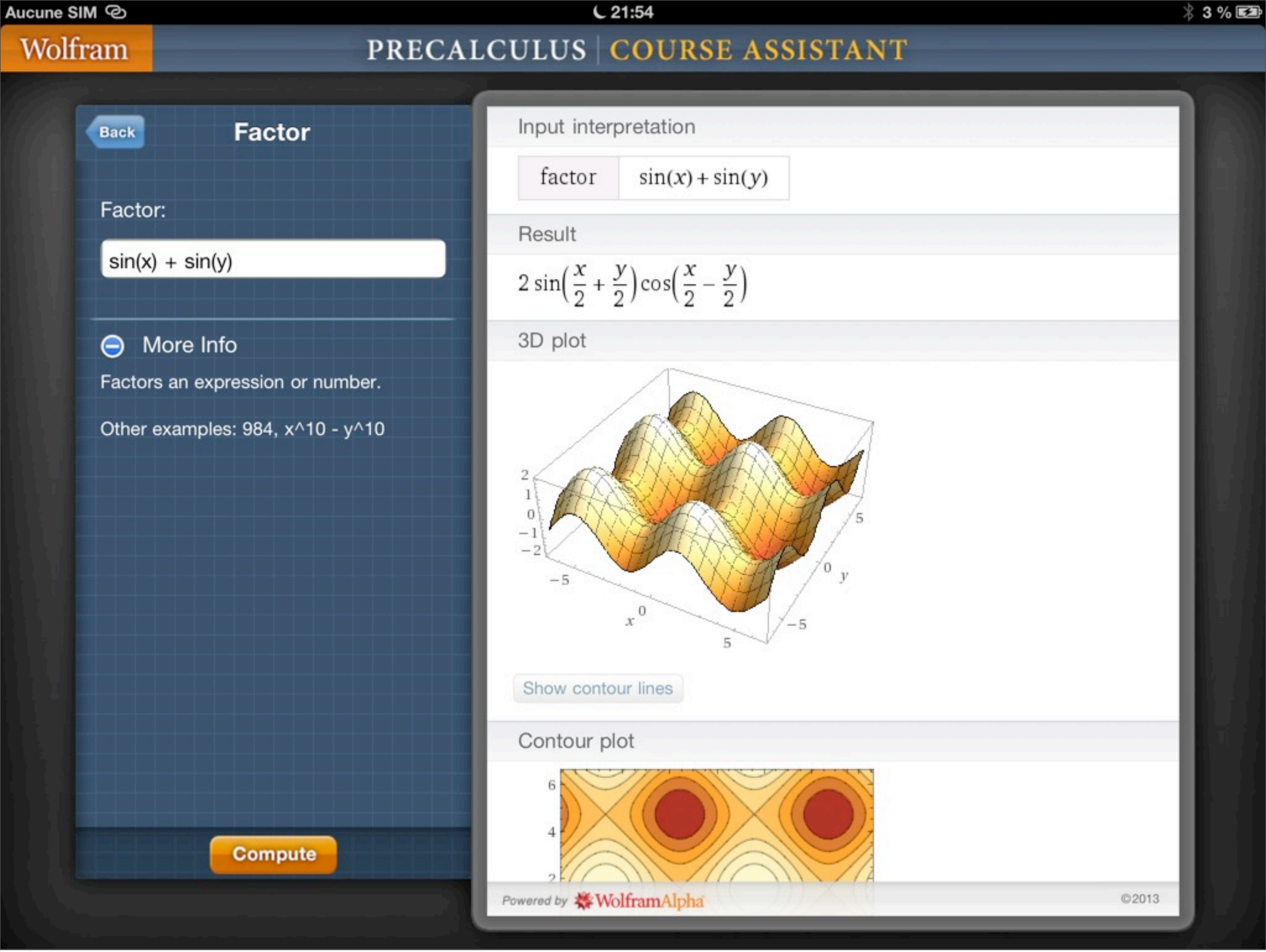
mardi 23 avril 13



mardi 23 avril 13



mardi 23 avril 13


Aucune SIM
21:54
3 %
Wolfram
PRECALCULUS | COURSE ASSISTANT
Back
Factor
Factor:
sin(x) + sin(y)
More Info
Factors an expression or number.
Other examples: 984, x^10 - y^10
Compute
Input interpretation
factor | sin(x) + sin(y)
Result
2 sin(x/2 + y/2) cos(x/2 - y/2)
3D plot
Show contour lines
Contour plot
Powered by WolframAlpha
©2013

Géométrie

Aucune SIM 21:52 3 %

Wolfram PRE-ALGEBRA | COURSE ASSISTANT

Back **Side and Hypotenuse**

Calculate the missing side of the right triangle using the pythagorean theorem:

Side: 6

Hypotenuse: 12

Compute

Input information

Pythagorean theorem	
first side length	6
hypotenuse	12

Result

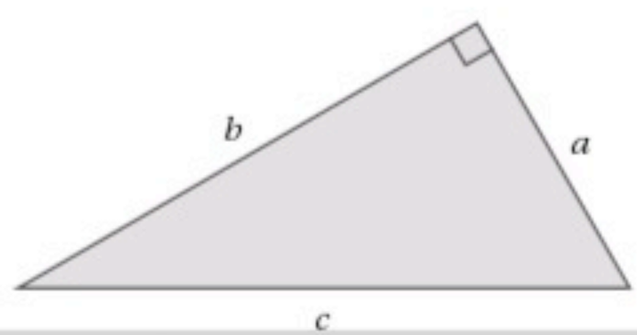
second side length	10.39

Equation

$a^2 + b^2 = c^2$

b	second side length
a	first side length
c	hypotenuse

Diagram



Powered by WolframAlpha ©2013

Aucune SIM 21:55 3 %

Wolfram PRECALCULUS | COURSE ASSISTANT

Back **Addition/Subtraction**

(2, 3, 7)

plus

(-2, 3, 8)

More Info

Compute

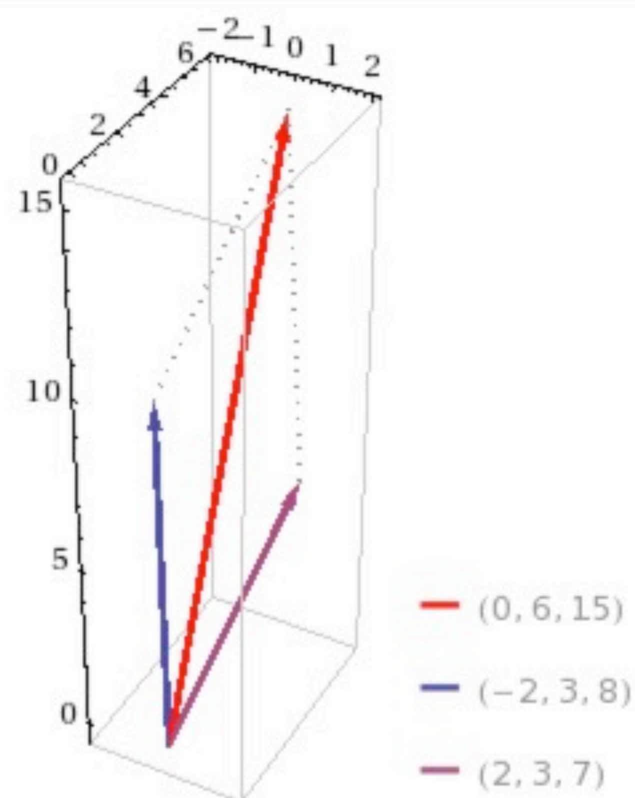
Input interpretation

$(2, 3, 7) + (-2, 3, 8)$

Result

$(0, 6, 15)$

Vector plot



Vector length

$3\sqrt{29} \approx 16.1555$

More digits

Powered by WolframAlpha ©2013